Domácí úkoly
LS 2022/2023

(1) V závislosti na parametru $x \in \mathbb{R}$ vyšetřete konvergenci následující řady:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[3]{8^n + 3^n} - \sqrt{4^n + n} \right) x^n.$$

(2) V závislosti na parametru $p \in \mathbb{R}$ vyšetřete konvergenci následující řady:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(k^{\operatorname{arccotg}\left(k^2\right)} - \cos\left(\frac{1}{k}\right) \right) k^p.$$

(3) Najděte všechna maximální řešení rovnice:

$$y''' + y' = e^x + \sin(x) - \cos(x), \quad y(0) = \frac{1}{2}.$$

(4) Ukažte, že rovnice

$$\sin(xyz) + 1 = x^2 z$$

určuje v jistém okolí bodu $[1, 0, 1]$ jednoznačně funkce $y = y(x, z)$ a $z = z(x, y)$ splňující $y(1, 1) = 0$ a $z(1, 0) = 1$. Napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce $z(x, y)$ v bodě $[1, 0, 1]$. Spočtěte $\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial z}(1, 1)$.

(5) Nalezněte supremum a infimum funkce f na množině M a určete, zda a případně kde se jich nabývá:

$$f(x, y, z) = x + 2y - 3z, \quad M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ x^2 + y^2 + (z + 1)^2 = 1\}.$$